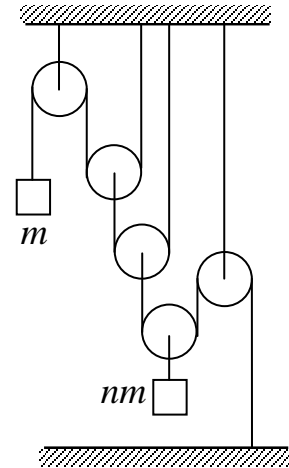


Олимпиада «Ломоносов 2024 – 2025» по физике
Отборочный этап
решения к задачам для 11-х классов

1. Задача (20 баллов).

Система, состоящая из двух неподвижных блоков, трех подвижных блоков и двух грузов массами m и $n \cdot m$, связанных нерастяжимыми нитями, представлена на рисунке. Определим модуль ускорения груза массой $n \cdot m$, если $n=4$. Ответ приведите в м/с^2 , округлив до тысячных долей. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10 \text{ м/с}^2$. Нити и блоки считайте невесомыми.



Решение

Координаты тел системы отмечены на рисунке. Уравнения кинематической связи для координат тел системы являются следствием нерастяжимости нитей:

$$x_1 + 2x_3 = \text{const},$$

$$x_4 - x_3 + x_4 = \text{const},$$

$$x_2 - x_4 + x_2 = \text{const}.$$

В результате двукратного дифференцирования записанных соотношений по времени, получаем уравнения кинематической связи для проекций ускорений:

$$a_1 + 2a_3 = 0,$$

$$2a_4 - a_3 = 0,$$

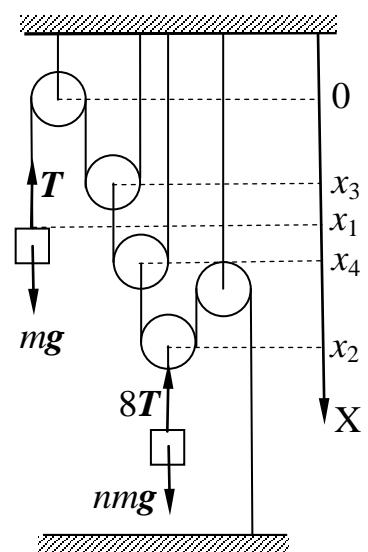
$$2a_2 - a_4 = 0.$$

Ускорение груза массой nm равно ускорению нижнего подвижного блока a_2 в силу нерастяжимости нижней нити. Исключая из последних соотношений ускорения a_3 и a_4 , получаем уравнение кинематической связи для проекций ускорений грузов:

$$a_1 + 8a_2 = 0.$$

На грузы действуют силы тяжести и силы натяжения нитей. Поскольку блоки невесомы, то сила натяжения нити, прикрепленной к грузу массой nm , в 8 раз превышает силу натяжения нити, на которой подвешен левый груз. Запишем уравнения движения грузов в проекциях на ось X :

$$ma_1 = mg - T,$$



$$nma_2 = nmg - 8T.$$

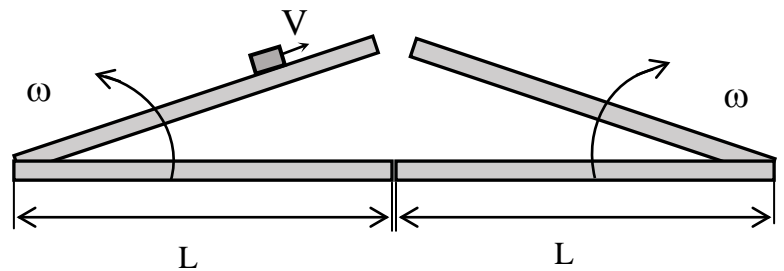
Решая систему последних трех уравнений, получаем:

$$a_2 = \frac{(n-8)g}{n+64}.$$

Ответ: $a_2 = \frac{(n-8)g}{n+64}$

2. Задача (20 баллов).

Мотоциклист-каскадёр придумал трюк под названием «разводной трамплин». Трамплин состоит из двух пролётов одинаковой длины, которые могут одновременно подниматься с постоянной угловой скоростью, образуя разрыв между пролётами (см. рисунок). Каскадёр



рассчитал, что если пролёты трамплина начнут подниматься с угловой скоростью $\omega = 0,125$ рад/с в тот момент, когда он, двигаясь на мотоцикле с максимально возможной для мотоцикла скоростью, въезжает на разводную часть трамплина, и, что если далее он будет двигаться по поднимающемуся пролёту с этой скоростью, то, оказавшись у его края в тот момент, когда пролёт поднимется на угол $\alpha = 30^\circ$, он сможет перепрыгнуть образовавшийся разрыв и приземлится на край второго пролёта трамплина. Какова при этом должна быть длина пролёта L разводной части трамплина? Считать, что положение пролётов не меняется за время полёта мотоцикла над разрывом. Ускорение свободного падения g принять равным 10 м/с^2 . Ответ выразить в метрах и округлить до десятых долей.

Решение.

Учтём линейную скорость вращения края поднимающегося пролёта трамплина ωL в момент отрыва мотоциклиста от края пролёта. Введём декартову систему координат XOY с началом в точке отрыва. Проекции вектора скорости мотоциклиста на оси выбранной системы координат имеют вид (здесь использованы соотношения (1) и (2)):

$$V_x = V \cos \alpha - \omega L \sin \alpha = \omega L \left(\frac{\cos \alpha}{\alpha} - \sin \alpha \right),$$

$$V_y = V \sin \alpha + \omega L \cos \alpha = \omega L \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} + \cos \alpha \right).$$

Время полёта мотоциклиста между пролётами трамплина найдём из условия, что координата мотоциклиста $Y = V_y t - \frac{gt^2}{2} = 0$. Откуда следует, что $t = \frac{2V_y}{g}$.

Координата X мотоциклиста в этот момент времени, равная $X = V_x t = \frac{2V_x V_y}{g}$,

должна совпадать с координатой X края второго пролёта трамплина, т.е. $X = S_2$. Таким образом, получаем следующее соотношение:

$$\frac{2}{g} \omega L \left(\frac{\cos \alpha}{\alpha} - \sin \alpha \right) \omega L \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} + \cos \alpha \right) = 2L(1 - \cos \alpha).$$

Из последнего соотношения получаем итоговую расчётную формулу для искомой длины пролёта трамплина L :

$$L = \frac{g}{\omega^2} \frac{(1 - \cos \alpha)}{\left(\frac{\cos \alpha}{\alpha} - \sin \alpha \right) \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} + \cos \alpha \right)}.$$

Ответ: $L = \frac{g}{\omega^2} \frac{(1 - \cos \alpha)}{\left(\frac{\cos \alpha}{\alpha} - \sin \alpha \right) \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} + \cos \alpha \right)} = 40,8 \text{ м}$

3. Задача (20 баллов).

В сосуде с теплоизолирующими стенками находится небольшое количество озона, который быстро превращается в кислород. Когда весь озон превратился в кислород, давление в сосуде возросло в $n = 10$ раз. При образовании трёх молей кислорода из двух молей озона той же температуры выделяется энергия $Q = 284$ кДж. Молярная теплоёмкость кислорода при постоянном объёме $c_v = 21$ Дж/(моль·К). Найти начальную температуру озона в сосуде. Объём сосуда считать неизменным. Ответ выразить в Кельвинах и округлить до десятых долей.

Решение. Пусть объём сосуда равен V , и в нём находится ν молей озона. В начальном состоянии, когда в сосуде находится только озон, его температура и давление равны T_1 и P_1 . В конечном состоянии, когда весь озон превратился в кислород, и в сосуде находится только кислород, температура и давление последнего равны T_2 и P_2 . Считая газы идеальными, запишем уравнения состояния озона и кислорода в указанные моменты времени. Поскольку из двух молей озона получается три моля кислорода, данные уравнения имеют вид:

$$P_1 V = \nu R T_1, \quad (1)$$

$$P_2 V = \frac{3}{2} \nu R T_2. \quad (2)$$

Из уравнений (1), (2) следует, что температуры и давления озона и кислорода в указанные моменты времени удовлетворяют следующему соотношению:

$$2T_1P_2 = 3T_2P_1. \quad (3)$$

Так как сосуд теплоизолированный, и при превращении озона в кислород работа не совершается, внутренняя энергия газов сохраняется. Поэтому за счёт выделившейся энергии температура образовавшегося кислорода должна увеличиться и стать равной такой температуре T_2 , чтобы выполнялось соотношение:

$$3c_vT_1 + Q = 3c_vT_2. \quad (4)$$

Подставляя конечную температуру кислорода T_2 , выраженную из уравнения (3) в уравнение (4), получим:

$$Q = 3c_vT_1 \left(\frac{2P_2}{3P_1} - 1 \right).$$

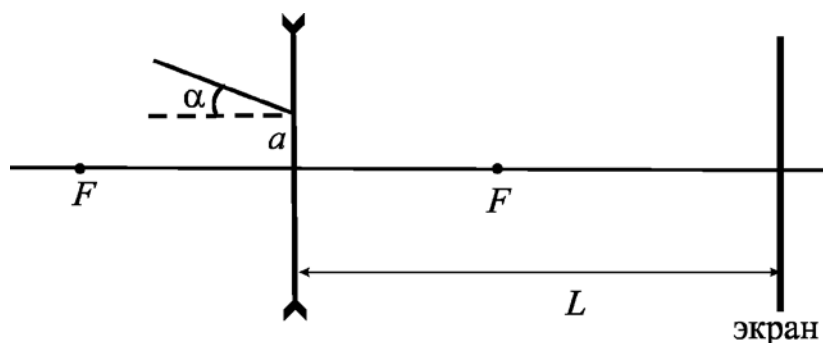
Учитывая, что отношение давлений по условию задачи равно n , для начальной температуры озона в сосуде получается следующее выражение:

$$T_1 = \frac{Q}{c_v(2n-3)}.$$

Ответ: $T_1 = \frac{Q}{c_v(2n-3)} = 795,5 \text{ K}$

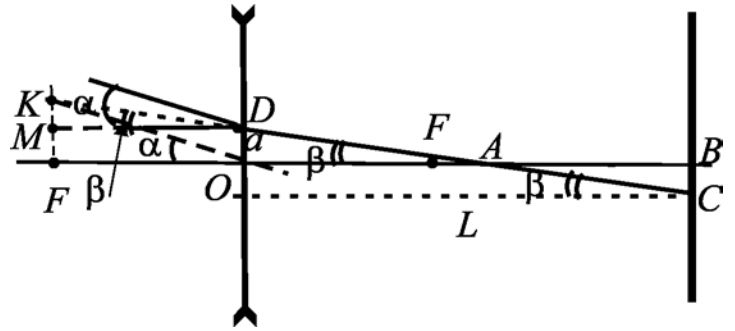
4. Задача (20 баллов).

Тонкий световой пучок падает на тонкую рассеивающую линзу под углом $\alpha = 30^\circ$ к её главной оптической оси на расстоянии $a = 2$ см от центра линзы (см. рисунок). За линзой расположен экран, перпендикулярный главной оптической оси линзы. На каком расстоянии l от главной оптической оси наблюдатель увидит на экране яркую точку, если фокусное расстояние линзы равно $f = 5$ см, а расстояние между линзой и экраном $L = 14$ см. Ответ дайте в миллиметрах, округлив до десятых долей.



Решение:

Ход луча показан на рисунке. После линзы луч пойдёт под углом β к главной оптической оси линзы и пересечёт её в точке A . Светлое пятно на экране будет наблюдаться в точке C . Искомое расстояние $l = BC$.



Из рисунка видно, что

$$BC = L \tan \beta - a.$$

Угол $\angle KDM = \beta$, $MD = OF$ (по построению), тогда из треугольника KDM

$$\tan \beta = \frac{KM}{OF} = \frac{KF - a}{f}.$$

Из треугольника KOF :

$$KF = f \tan \alpha.$$

Получим:

$$\tan \beta = \tan \alpha - \frac{a}{f}.$$

Окончательно имеем:

$$l = BC = L \left(\tan \alpha - \frac{a}{f} \right) - a = L \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{5} \right) - 2 \text{ (см)}.$$

$$l = (0,177L - 2) \cdot 10 \text{ мм}.$$

Замечание: Так как $\frac{a}{\tan \alpha} \approx 3,46 \text{ см} < f = 5 \text{ см}$, то если убрать линзу, луч

пересечёт её главную оптическую ось до фокуса, потому после линзы луч наклонён в сторону главной оптической оси.

Ответ: $l = L \left(\tan \alpha - \frac{a}{f} \right) - a$

5. Задача (20 баллов).

Два резистора $R_1 = 40$ Ом и R_2 соединены параллельно и подключены к аккумулятору с ЭДС $\mathcal{E} = 10$ В и внутренним сопротивлением $r = 5$ Ом. Определите мощность N , развиваемую сторонними силами, если сопротивление резистора R_2 подобрано таким образом, что на нём выделяется наибольшая мощность. Ответ выразите в Вт, округлив до целого числа.

Решение:

Сопротивление внешней части электрической цепи, заданной в условии, равно:

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

По закону Ома для полной цепи, сила тока, текущего через источник равна:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R_0}.$$

Тогда разность потенциалов между полюсами источника равна напряжению на внешнем участке цепи

$$U = \mathcal{E} - Ir = \frac{\mathcal{E} R_0}{r + R_0} = \frac{\mathcal{E} R_1 R_2}{r R_1 + R_2 (r + R_1)}.$$

Мощность, выделяемая на резисторе R_2 равна:

$$N_2 = \frac{U^2}{R_2} = R_2 \left(\frac{\mathcal{E} R_1}{r R_1 + R_2 (r + R_1)} \right)^2, \text{ она достигает максимума при таком } R_2, \text{ при}$$

котором производная мощности по R_2 равна нулю.

$$R_2 = \frac{r R_1}{r + R_1}, \text{ а сопротивление внешней цепи } R_0 = \frac{r R_1}{2r + R_1}.$$

Мощность источника при этом равна:

$$N = \mathcal{E} I = \frac{\mathcal{E}^2}{r + R_0} = \frac{(2r + R_1) \cdot \mathcal{E}^2}{2r(r + R_1)}.$$

$$\text{Ответ: } N = \frac{(2r + R_1) \cdot \mathcal{E}^2}{2r(r + R_1)}$$

Красным выделен варьируемый параметр в задаче.

Критерий оценивания:

Получен верный численный ответ	Полный балл
Нет верного численного ответа	0 баллов